I Différentes formes d'une expression algébrique

On utilise les lettres pour désigner une grandeur qui varie (on parle alors de variable) ou une grandeur inconnue.

Le calcul littéral permet de transformer une expression algébrique pour résoudre des problèmes (étudier l'évolution d'une quantité dépendant d'une variable, chercher la ou les valeurs d'une inconnue, démontrer une propriété...).

Une expression algébrique peut s'écrire sous différentes formes :

Une forme développée (somme de termes) ou une forme factorisée (produit ou quotient) .

Propriété

Pour tout nombres a, b, c, d et k , on a les identités suivantes :

$$(a) \quad k(a + b) = ka + kb$$

$$(b) \quad k(a - b) = ka - kb$$

$$(c) \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples :

Développer les expressions suivantes :

$$A = 7(3x - 9)$$

$$A = 7 \times 3x - 7 \times 9$$

$$A = 21x - 63$$

$$B = (3x - 7)(4x + 8)$$

$$B = 3x \times 4x + 8 \times 3x - 7 \times 4x - 7 \times 8$$

$$B = 12x^2 + 24x - 28x - 56$$

$$B = 12x^2 - 4x - 56$$

$$C = (2x - 4)(6y - 6)$$

$$C = 2x \times 6y - 6 \times 2x - 4 \times 6y + 4 \times 6$$

$$C = 12xy - 12x - 24y + 24$$

Factoriser les expressions suivantes :

$$D = 15a + 35$$

$$D = 5 \times 3a + 5 \times 7$$

$$D = 5(3a + 7)$$

$$E = 12x^2 - 15x$$

$$E = 3 \times 4 \times x \times x - 3 \times 5 \times x$$

$$E = 3x(4x - 5)$$

$$F = (4x + 6)(2x - 9) + (4x + 6)(3x - 7)$$

$$F = (4x + 6)(2x - 9 + 3x - 7)$$

$$F = (4x + 6)(5x - 16)$$

Propriété

Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Développer les expressions suivantes :

$$G = (5x + 8)^2$$

$$G = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 8 + 8^2$$

$$G = 25x^2 + 80x + 64$$

$$H = (3x - 7)^2$$

$$H = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 7 + 7^2$$

$$H = 9x^2 - 42x + 49$$

$$I = (9 + 2y)(9 - 2y)$$

$$I = (9)^2 - (2y)^2$$

$$I = 81 - 4y^2$$

Factoriser les expressions suivantes :

$$J = 16x^2 + 24x + 9$$

$$J = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2$$

$$J = (4x + 3)^2$$

$$L = 49y^2 - 64$$

$$L = (7y)^2 - 8^2$$

$$L = (7y + 8)(7y - 8)$$

$$N = (7x + 8)^2 - 49$$

$$N = (7x + 8)^2 - 7^2$$

$$N = (7x + 8 + 7)(7x + 8 - 7)$$

$$N = (7x + 15)(7x + 1)$$

$$K = 25x^2 - 60x + 36$$

$$K = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 6 + 6^2$$

$$K = (5x - 6)^2$$

$$M = 4x^2 - 7$$

$$M = (2x)^2 - (\sqrt{7})^2$$

$$M = (2x + \sqrt{7})(2x - \sqrt{7})$$

II Équations

Définition

Une équation est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres qui représentent des nombres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Propriété

On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant, en soustrayant, en multipliant, ou en divisant par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

Exemples :

Résoudre les équations suivantes :

$$8x - 12 = 476$$

$$8x = 476 + 12$$

$$8x = 488$$

$$x = \frac{488}{8}$$

$$x = 61$$

$$8x + 15 = 5x + 32$$

$$8x - 5x = 32 - 15$$

$$3x = 17$$

$$x = \frac{17}{3}$$

Propriété

Si un produit est nul alors l'un des facteurs est nul.

Exemples :

Résoudre l'équation suivante :

$$(5x + 7)(3x - 11) = 0$$

$$\text{Soit } 5x + 7 = 0$$

$$5x = -7$$

$$x = \frac{-7}{5}$$

$$x = -1,4$$

$$\text{Soit } 3x - 11 = 0$$

$$3x = 11$$

$$x = \frac{11}{3}$$

Pas d'écriture décimale

L'équation $(5x + 7)(3x - 11) = 0$ admet 2 solutions : $-1,4$ et $\frac{11}{3}$

$$S = \left\{ -1,4; \frac{11}{3} \right\}$$

Propriété

Résolution de l'équation $x^2 = k$

On considère l'équation $x^2 = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$.

- Si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'a aucune solution réelle.
- Si $k = 0$, l'équation $x^2 = k$ a une seule solution réelle $x = 0$.
- Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions réelles $x = \sqrt{k}$ et $x = -\sqrt{k}$.

Exemples :

L'équation $x^2 = -8$ n'admet pas de solution réelle.

L'équation $x^2 = 7$ admet deux solutions : $x = \sqrt{7}$ et $x = -\sqrt{7}$

III Manipulation de fractions

Propriété

Les règles de calculs habituelles des quotients comme la mise au même dénominateur peuvent être utilisées pour transformer des expressions fractionnaires si le(s) dénominateur(s) présent(s) dans l'expression est (sont) non nul(s).

Exemples :

Soit $A = 3x + \frac{2x+7}{5x-2}$ pour $x \neq \frac{2}{5}$

$$A = \frac{3x}{1} + \frac{2x+7}{5x-2}$$

$$A = \frac{3x \times (5x-2)}{1 \times (5x-2)} + \frac{2x+7}{5x-2}$$

$$A = \frac{15x^2 - 6x}{5x-2} + \frac{2x+7}{5x-2}$$

$$A = \frac{15x^2 - 6x + 2x + 7}{5x-2}$$

$$A = \frac{15x^2 - 4x + 7}{5x-2}$$

Pourquoi $x \neq \frac{2}{5}$?

Il est interdit de diviser par 0.

Dans l'expression A, il est interdit que $5x - 2$ soit égal à 0.

$$5x - 2 = 0$$

$$5x = 2$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$\frac{2}{5}$ est donc une valeur interdite.

Soit $B = \frac{5}{x+8} + \frac{2}{3x-12}$

Déterminons les valeurs interdites :

$$\begin{array}{l} x + 8 = 0 \\ x = -8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3x - 12 = 0 \\ 3x = 12 \\ x = \frac{12}{3} \\ x = 4 \end{array}$$

Les deux valeurs interdites sont -8 et 4

$$B = \frac{5}{x+8} + \frac{2}{3x-12}$$

$$B = \frac{5 \times (3x-12)}{(x+8) \times (3x-12)} + \frac{2 \times (x+8)}{(3x-12) \times (x+8)}$$

$$B = \frac{15x-60}{(x+8)(3x-12)} + \frac{2x+16}{(x+8)(3x-12)}$$

$$B = \frac{15x-60+2x+16}{(x+8)(3x-12)}$$

$$B = \frac{17x-44}{(x+8)(3x-12)}$$