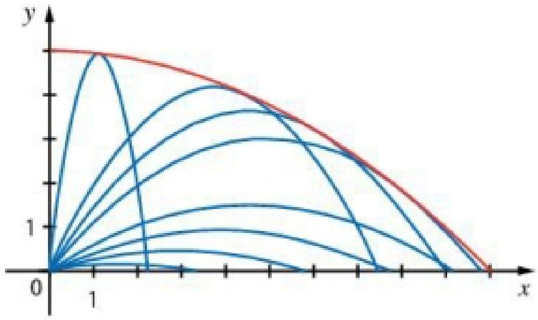
Chapitre 1

Second degré

Activité n°1

La parabole de sûreté

En balistique, on désigne par **parabole de sûreté** la courbe qui « recouvre » toutes les trajectoires paraboliques possibles d'un obus lancé depuis un point O donné avec une vitesse donnée dans un plan vertical.
Aucun point en dehors de cette courbe ne peut être atteint par un obus ayant cette vitesse initiale : la zone est « sûre », d'où le nom de la courbe.



Cette courbe est une parabole, représentation graphique dans un repère d'origine O de la fonction f telle que $f(x) = -\frac{1}{4h}x^2 + h$, où h est l'altitude maximale pouvant être atteinte par le projectile.

1 On suppose que $h = 200$ m.
Calculer $f(400)$. Interpréter le résultat trouvé.

2 On suppose que $h = 100$ m.

a. Montrer que $f(x)$ s'écrit sous forme factorisée : $f(x) = \frac{1}{400}(x + 200)(-x + 200)$.

b. Quelle est la portée maximale horizontale de l'obus ? Quelles en sont les conséquences pour l'assaillant ?

c. On suppose à présent que le canon se trouve sur une citadelle située 125 mètres au-dessus de la plaine. Où doivent alors se placer les assaillants pour être en sûreté ?

Activité n°2

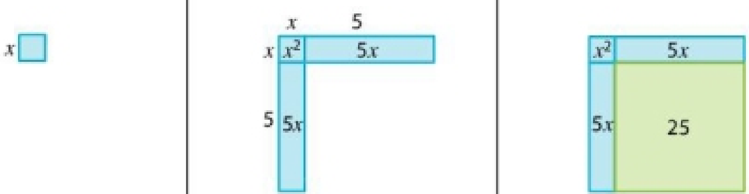
La méthode d'Al-Khwârizmî

1 On se propose de résoudre l'équation du second degré (E) : $x^2 + 10x = 39$.
Voici la méthode proposée par Al-Khwârizmî.

Étape 1 : on suppose que x est positif et on construit un carré de côté x.

Étape 2 : on borde ce carré de deux rectangles dont l'aire respective vaut $\frac{10}{2} \times x$.
On obtient ainsi 5 comme autre dimension.

Étape 3 : on complète alors le grand carré.



a. Exprimer l'aire de la surface colorée en bleu de deux façons différentes et en déduire que :

$$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25.$$

b. En déduire que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x + 5)^2 = 64$.
Déterminer alors la solution positive de l'équation (E).
Al-Khwârizmî ne parle pas de l'autre solution de cette équation car pour lui 64 n'a qu'une racine carrée qui est 8.

c. Déterminer l'autre solution de l'équation (E).

2 Utiliser cette méthode pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 + 12x = 45$

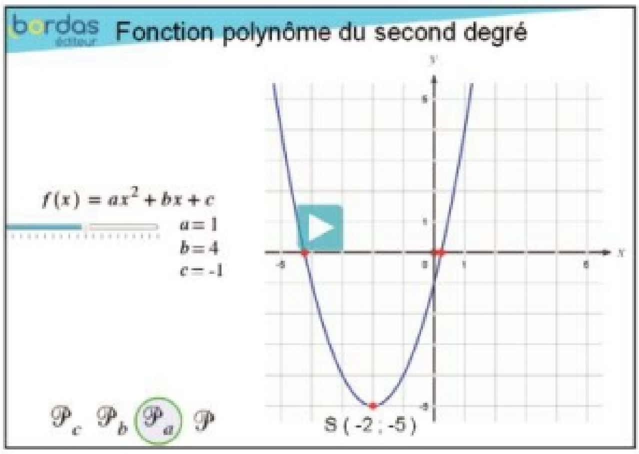
b. $x^2 + 4x - 32 = 0$

Activité n°3

Des paraboles qui changent de forme

a, b et c sont des nombres réels.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on construit les courbes $\mathcal{P}_c$, $\mathcal{P}_b$ et $\mathcal{P}_a$ d'équations respectives :

- $\mathcal{P}_c : y = 2x^2 + 4x + c$
- $\mathcal{P}_b : y = x^2 + bx + 1$
- $\mathcal{P}_a : y = ax^2 + 4x - 1$



1 On fait varier le réel c de -10 à 10.

a. Quelles remarques peut-on faire concernant les paraboles $\mathcal{P}_c$?

b. Observer les sommets de ces paraboles. Ces points semblent appartenir à une droite, laquelle ?

2 On fait varier le réel b de -10 à 10.

a. Quelles remarques peut-on faire concernant les paraboles $\mathcal{P}_b$?

b. Observer le nombre de points d'intersection de ces paraboles avec l'axe des abscisses selon les valeurs de b.

c. Ces paraboles passent toutes par un même point, lequel ?

3 On fait varier le réel a de -10 à 10, en le supposant non nul.

a. Quelles remarques peut-on faire concernant les paraboles $\mathcal{P}_a$?

b. Pour quelles valeurs de a ces paraboles coupent-elles l'axe des abscisses en deux points distincts ?

Activité n°4

La lanceuse de javelot

Au cours d'une compétition d'athlétisme, Émilie, athlète, lance un javelot. Ce javelot quitte son bras à deux mètres de haut et fait un angle de 60° avec l'horizontale.

L'étude des divers mouvements subis par ce javelot montre que, au bout de t secondes, il atteint une hauteur (exprimée en mètres) donnée par l'expression $h(t) = -5t^2 + 17t + 2$.
Pour un problème lié à des panneaux publicitaires, l'organisateur de la compétition se demande si le javelot montera à plus de 14 mètres, et si oui, pendant combien de temps.

1 Écrire l'inéquation liée à ce problème.

2 Répondre aux questions que se pose l'organisateur.

n°12p.50
Écrire chacun des polynômes du second degré suivants sous la forme $ax^2 + bx + c$. Pour chacun des cas, on précisera les valeurs de a, b et c.

a) $f(x) = -x^2 + 5 - 3x$ b) $g(x) = x^2 + 1 + 3x^2 + 4x + 5$
c) $h(x) = (x+1)^2 + 17$ d) $j(x) = (2x+1)^2 + (x-1)^2$

n°13p.50
On donne ci-dessous l'expression de fonctions polynômes du second degré sous forme factorisée. Dans chaque cas, déterminer leurs racines.
a) $f(x) = (x-5)(x+9)$ b) $g(x) = 3(x+7)(-x+11)$
c) $h(x) = x(x-45)$ d) $k(x) = -4(x+6)(x-501)$

n°14p.50
Écrire l'expression sous forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré de racines 6 et 9.

n°15p.50
La fonction polynôme du second degré d'expression $f(x) = x^2 - 7x + 5$ a deux racines.
Donner la somme et produit de ces racines.

n°16p.50 Les équations suivantes ont deux racines distinctes.
Donner leur somme et leur produit.

a) $x^2 + 5x - 11 = 0$ b) $2x^2 - x - 89 - 0$
c) $-3x^2 + 7x + 20 = 0$ d)$-x^2 - 9x + 17 = 0$

n°17p.50
La fonction polynôme du second degré f telle que $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ a pour racines -3 et 2.
Recopier et compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		...	0	...	0	...	

n°18p.50
La fonction polynôme du second degré g telle que $g(x) = -3x^2 + 12x + 15$ a pour racines -1 et 5.
Recopier et compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$g(x)$		...	0	...	0	...	

n°20p.51
Choisir la ou les bonnes réponses.
Parmi les polynômes du second degré ci-dessous, dire ceux qui sont écrits sous forme canonique :
a) $x^2 + 7x + 1$ b) $(2x+1)^2 - 4$
c) $3(x-8)^2 + 5$ d) $-5(x+1)^2 + 2$
e) $-3x^2 + x$ f) $3 + (3x-5)^2$

n°21p.51
Dans chacun des cas, calculer le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$. a) $a = 5$,$b = 1$ et $c = 4$
b) $a = 3$,$b = -2$ et $c = 1$
c) $a = 2$, $b = -1$ et $c = -5$
d) $a = -1$,$b = -5$ et $c = -2$.

n°23p.51
Soit l'équation du second degré (E) $x^2 - 2x - 15 = 0$.

1. Vérifier que (E) a pour discriminant $\Delta = 64$.
2. En déduire les deux solutions de (E).

Dans les exercices 24 à 26, justifier la valeur du discriminant Δ, puis résoudre les équations du second degré données.

24 a) $x^2+2x-3=0$ ($\Delta=16$) b) $x^2+3x+2=0$ ($\Delta=1$)

25 a)$-x^2+2x+3=0$ ($\Delta=16$) b) $-5x^2+8x-7-0$ ($\Delta=-76$)

26 a) $9x^2-42x+49=0$ ($\Delta=0$) b) $-x^2+x-12=0$ ($\Delta=49$)

n°32 et 33 p.51

Dans les exercices 32 et 33, donner les racines du polynôme du second degré donné, puis le factoriser.

$A(x)=x^2+6x+9$ $B(x)=-x^2+2x+15$

$C(x)=x^2+18x+77$ $D(x)=2x^2-7x+8$

n°36 et 37 p.51

Dans les exercices 36 et 37, on donne un polynôme du second degré ainsi que ses racines (s'il en a).
Donner son signe selon les valeurs de x. n°36

a. $f(x)=x^2+2x-24$. Racines : -6 et 4. b. $g(x)=x^2+x+6$. Pas de racine.

n°37

a. $f(x)=9x^2+6x+1$. Racine :$-\dfrac{1}{3}$ b. $g(x)=-4x^2+11x-6$. Racines : $\dfrac{3}{4}$ et 2.

n°38 p.51

Le polynôme du second degré $x^2+9x-10$ a deux racines -10 et 1. Résoudre l'inéquation $x^2+9x-10>0$.

n°41 p.52

Soit f et g les fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
$f(x)=(-2x+1)(x-10)$ et $g(x)=(x+4)(x+6)$.

1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. Étudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
3. Résoudre les inéquations $f(x)>0$ et $g(x)\geqslant 0$.

n°42 p.52

Soit f et g les fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
$f(x)=(5x+3)(7-x)$ et $g(x)=(x-2)(3x+12)$.

1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. Étudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
3. Résoudre les inéquations $f(x)\leqslant 0$ et $g(x)<0$.

n°43 p.52

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)(2x+7)+(x+1)(x+2)$.

1. Factoriser $f(x)$ et en déduire son tableau de signes.
2. Résoudre l'inéquation $f(x)<0$.

n°44 p.52

1. Déterminer le réel c de telle sorte que le réel -3 soit solution de l'équation $2x^2-5x+c=0$.
2. Sachant que l'équation précédente admet une autre solution distincte de -3, déterminer cette deuxième solution.

PISTE : Utiliser le produit des racines.

n°45 p.52

1. Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 2 et en -8.
2. Déterminer la fonction polynôme du second degré f s'annulant en $-\dfrac{1}{2}$ et 5 et telle que $f(0)=-10$.
3. Déterminer la fonction polynôme du second degré g de racines 3 et 8 et telle que $g(6)=12$.

n°46 p.52

1. Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 1 et en -12.
2. Déterminer la fonction polynôme du second degré f s'annulant en -4 et 3 et telle que $f(4) = 4$.
3. Déterminer la fonction polynôme du second degré g de racines -1 et 1 et telle que $g(0) = 1$.

n°48 p.52
Écrire chacun des polynômes du second degré suivants sous forme canonique.
$A(x) = x^2 + 6x - 10$ $\quad$ $B(x) = 3x^2 + 12x + 2$
$C(x) = -2x^2 + 8x - 12$ $\quad$ $D(x) = -x^2 + 6x - 1$

Pour les exercices 49 et 50, écrire sous forme canonique chacun des polynômes du second degré donnés.
n°49 p.52 $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$ $\quad$ $g(x) = -2x^2 + 8x + 5$
n°50 p.52 $h(x) = 3x^2 - x + 6$ $\quad$ $j(x) = -5x^2 + 10x - 3$

Dans les exercices 51 et 52 calculer le discriminant de chacun des polynômes du second degré donnés.
n°51 p.52 $f(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + x - \dfrac{1}{4}$ $\quad$ $g(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + 2x - 1$
n°52 p.52 $h(x) = 10 - x + 3x^2$ $\quad$ $j(x) = x^2 - \sqrt{3}x - 1$

n°53 p.52
Résoudre chacune des équations suivantes.
a.$x^2 + x - 12 = 0$ $\quad$ b. $5x^2 - 3x + 1 = 0$
c. $2x^2 + x - 3 = 0$ $\quad$ d. $9x^2 - 30x + 25 = 0$

Dans les exercices 59 et 60 résoudre les équations données.
n°59 p.52 $15x^2 + x - 6 = 0$ $\quad$ $x^2 - 2x - 15 = 0$
n°60 p.52 $5x^2 - 7x + 6 = 0$ $\quad$ $4x^2 - 20x + 21 = 0$

Dans les exercices 62 à 64 résoudre les équations données.
n°62 p.53 $x^2 - 16x = 0$ $\quad$ $x^2 + 6 = 0$
n°63 p.53 $2x(x + 5) = 75 + x^2$ $\quad$ $(2x + 9)(x - 8) = 0$
n°64 p.53 $(4x + 3)^2 = (5x - 1)^2$ $\quad$ $(9v + 11)^2 - 56 = 3v - 1$

n°65 p.53
Pour quelles valeurs de x peut-on calculer l'expression :
$A(x) = \dfrac{x^2 + 19x + 18}{x^2 + 5x - 6}$

n°68 p.53
Déterminer le réel a tel que l'équation $x^2 + 2x - 7a$ n'admette qu'une seule solution. Quelle est cette solution ?

Pour les exercices 75 à 78, résoudre les équations proposées. Ne pas oublier s'il y a lieu d'éliminer les valeurs qui annulent les dénominateurs.

n°75 p.53 $\quad$ $x + \dfrac{1}{x-3} = 5$

n°76 p.53 $\quad$ $\dfrac{x}{7} + \dfrac{21}{x+5} = \dfrac{47}{7}$

n°77 p.53 $\quad$ $x^3 - x^2 - 6x = 0$

n°78 p.53 $\quad$ $(x^2 - 5x - 14)(9x^2 + 9x - 10) = 0$

n°81 p.53
On souhaite déterminer, s'ils existent, deux nombres réels x_1 et x_2 connaissant leur somme S et leur produit P.

1. (a) Exprimer x_2 en fonction de S et x_1.
   (b) Exprimer P en fonction de x_1 et S.
2. (a) En déduire que, s'il existe, x_1 est solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$(E).
   (b) Justifier que dans ce cas, x_2 est également solution de (E)
3. Application : déterminer deux nombres réels dont la somme est -3 et le produit -40.

n°82 p.53 Déterminer deux nombres réels dont la somme est 15 et le produit est -54.

n°83 p.53

1. Existe-t-il un rectangle d'aire 5 et de périmètre 8 ?
2. Déterminer une condition nécessaire portant sur S et P pour qu'il existe des nombres réels a et b ayant pour somme S et pour produit P.

n°85 p.53
Déterminer trois nombres entiers consécutifs sachant que la somme des carrés de ces nombres entiers est égale à 1877.