Chapitre 1

Second degré

I Polynôme du second degré

Définition

Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.
On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour nombre réel x. On pourra abréger fonction polynôme du second degré en polynôme du second degré.

Exemples :

$5x^2 - 3x + 4$, $3x^2 + 12$ et $(5x - 2)(3x + 7)$ sont des polynômes du second degré.

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré. On appelle racine du polynôme f tout nombre réel a tel que $f(a) = 0$.

Exemples :

2 est une racine du polynôme $6x^2 - 42x + 60$ car $6 \times 2^2 - 42 \times 2 + 60 = 0$

5 est une racine du polynôme $6x^2 - 42x + 60$ car $6 \times 5^2 - 42 \times 5 + 60 = 0$

Aucun nombre réel n'est racine du polynôme $5x^2 + 12$.

En effet, $5x^2 + 12 = 0$ n'a pas de solution.

Propriété

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes x_1 et x_2.
Alors f peut s'écrire sous forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Démonstration :

Considérons f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes x_1 et x_2.

C'est à dire que $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$.

$f(x_1) = 0$ donc $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$. Par conséquent $c = -ax_1^2 - bx_1$

$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx - ax_1^2 - bx_1 = a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1)$ $\qquad x^2 - x_1^2 = (x - x_1)(x + x_1)$

$f(x) = a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1) = (x - x_1)\Big(a(x + x_1) + b\Big)$ $\qquad$ **(1)**

x_2 est racine donc $f(x_2) = 0$

$f(x_2) = (x_2 - x_1)\Big(a(x_2 + x_1) + b\Big) = 0$

Puisque $x_1 \neq x_2, x_2 - x_1 \neq 0$

On a donc $a(x_2 + x_1) + b = 0$ et $b = -a(x_2 + x_1)$

Reprenons l'égalité **(1)** :

$f(x) = (x - x_1)\Big(a(x + x_1) + b\Big)$

$f(x) = (x - x_1)\Big(a(x + x_1) - a(x_2 + x_1)\Big)$

$f(x) = a(x - x_1)(x + x_1 - x_2 - x_1)$

On peut en déduire que $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemple :

On reprend le polynôme $f(x) = 6x^2 - 42x + 60$. Nous avons vu que 2 et 5 sont les 2 racines de f.

On a donc $f(x) = 6(x - 2)(x - 5)$

Propriété

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes.

La somme S des deux racines est $S = \dfrac{-b}{a}$

Le produit P des deux racines est $P = \dfrac{c}{a}$

Démonstration :

f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes x_1 et x_2.

On a donc $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Développons cette expression :

$f(x) = ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2$

$f(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$

Or $f(x) = ax^2 + bx + c$

On a donc $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$ $\qquad x_1 + x_2 = S$ et $x_1x_2 = P$

On a donc $b = -aS$ et $c = aP$

On en déduit donc que $S = \dfrac{-b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$

Application :

Soit $f(x) = 3x^2 + 12x - 63$

(a) Déterminer la somme et le produit des deux racines de f.

(b) Vérifier de deux façons que les racines de f sont 3 et -7

(c) vérifier votre réponse de la première question

Correction :

(a) $f(x) = 3x^2 + 12x - 63$. $a = 3$, $b = 12$ et $c = -63$

$S = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-12}{3} = -4$

$P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-63}{3} = -21$

(b) Méthode 1 : calculons $f(3)$ et $f(-7)$.

$f(3) = 3 \times 3^2 + 12 \times 3 - 63 = 0$

$f(-7) = 3 \times (-7)^2 + 12 \times (-7) - 63 = 0$

Méthode 2 : Si 3 et -7 sont les racines de f alors on dois avoir $f(x) = 3(x - 3)(x + 7)$

$3(x - 3)(x + 7) = 3(x^2 + 7x - 3x - 21) = 3(x^2 + 4x - 21) = 3x^2 + 12x - 63 = f(x)$

3 et -7 sont bien les racines de f.

(c) $S = 3 - 7 = -4$ et $P = 3 \times (-7) = -21$

Propriété

Signe d'un polynôme du second degré

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes x_1 et x_2.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

II Forme canonique

Propriété

Pour tout polynôme ax^2+bx+c, il existe deux réels α et β tels que :

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$$

$a(x-\alpha)^2+\beta$ est la forme canonique du polynôme ax^2+bx+c

Démonstration : Soit f la fonction telle que $f(x)=ax^2+bx+c$.

$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$

$x^2+\dfrac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$:

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}$

D'où : $x^2+\dfrac{b}{a}x=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}$

$f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{c}{a}\right]$

$f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

En notant $\Delta=b^2-4ac$: $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ Δ est appelé **discriminant** du polynôme a^2+bx+c

$f(x)=a\left(x-\dfrac{-b}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{-\Delta}{4a^2}\right)$

Soit $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=\dfrac{-\Delta}{4a}$

Exemple :

Soit $f(x)=2x^2+8x-10$.

Écrire $f(x)$ sous forme canonique :

Déterminons α, le discriminant Δ et β.

$\alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-8}{2\times 2}=-2$

$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times 2\ times(-10)=144$

$\beta=\dfrac{-\Delta}{4a}=\dfrac{-144}{4\times 2}=-18$

$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=2(x+2)^2-18$

III Résoudre une équation du second degré

Propriété

Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Le nombre de solutions de cette équation dépend du signe de Δ.

— Si $\Delta > 0$: L'équation admet deux solutions distinctes,
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

— Si $\Delta = 0$: L'équation admet une solution unique, $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

— si $\Delta < 0$: L'équation n'admet aucune solution.

Démonstration (à connaître) :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \qquad \textbf{(E)}$$

- Si $\Delta > 0$: **(E)** équivaut à $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\Delta}{2a}$ ou $x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\Delta}{2a}$.
  L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$: **(E)** équivaut à $x + \dfrac{b}{2a} = 0$, donc l'équation a une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$: L'équation n'a pas de solution car $\left(x + \dfrac{b}{a}\right)^2$ est positif et $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est strictement négatif.

Exercice corrigé :

(a) Résoudre $3x^2 + 12x - 36 = 0$ **(E)**

(b) Factoriser $3x^2 + 12x - 36$

Correction :

(a) $3x^2 + 12x - 36 = 0$ $\quad a = 3,\ b = 12,\ c = -36$

Déterminons Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 3 \times (-36) = 576$. $576 > 0$ donc l'équation **(E)** admet deux solutions distincts.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 - \sqrt{576}}{2 \times 3} = -6$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 + \sqrt{576}}{2 \times 3} = 2$

L'équation (E) admet 2 solutions : -6 et 2. $\quad \mathcal{S} = \{-6; 2\}$

(b) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x + 6)(x - 2)$