

I Taux de variation

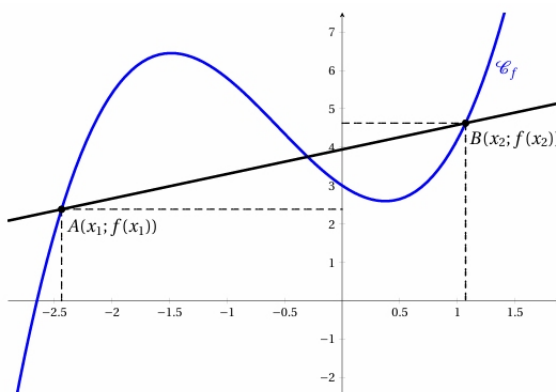
Définition

On considère la fonction f défini sur un ensemble I et deux nombres réels distincts x_1 et x_2 de I .

On appelle taux de variations de f entre x_1 et x_2 le nombre

$$\tau = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ce taux de variations correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$.



Exemple :

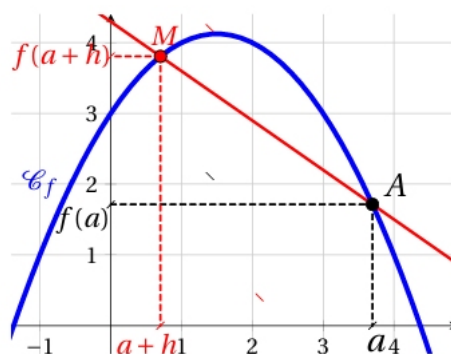
Soit f la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$.

Le taux de variation de f entre $a = 1$ et $b = 3$ est égal à :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Définition

Le taux de variation de la fonction f au point A d'abscisse a est le nombre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.



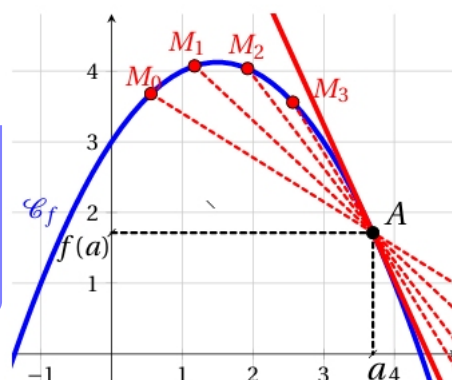
On note cette quantité de plusieurs manière différente :

- En mathématiques, on utilise généralement $\tau(a)$.
- Les physiciens lui préfèrent la notation $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a$ qui a l'avantage d'être plus « parlante ».

II Équation de tangente

Définition

La tangente à la courbe C_f représentative de la fonction f au point A d'abscisses a est la droite passant par le point A , position limite des sécantes à la courbe C_f passant par A .



Nombre dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a .

Dire que f est dérivable en a , c'est dire que lorsque h se rapproche de 0, le taux de variation entre a et $a + h$ se rapproche d'une valeur ℓ , ce que l'on note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \quad \ell \text{ est appelé le } \mathbf{\text{nombre dérivé de } f \text{ en } a}$$

Pour désigner le nombre dérivé d'une fonction f en un point a , les mathématiciens emploient la notation $f'(a)$ due au mathématicien français Joseph-Louis LAGRANGE (1736 – 1813).

Les physiciens privilégient la notation différentielle introduite, en 1684, par le mathématicien et philosophe allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 – 1716), dans son traité « Nouvelle méthode pour chercher les maxima, les minima, ainsi que les tangentes ».

Par exemple, la dérivée de la vitesse par rapport au temps est noté $\frac{dv}{dt}$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

Montrons que f est dérivable en 2.

$$\text{Calculons le taux de variations entre } 2 \text{ et } 2+h : \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Pour calculer ce taux de variations, on a besoin de $f(2+h)$ et de $f(2)$.

$$f(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 3$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 5(2+h) + 3$$

$$f(2) = 4 - 10 + 3$$

$$f(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 10 - 5h + 3$$

$$f(2) = -3$$

$$f(2+h) = h^2 - h - 3$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h^2 - h - 3 - (-3)}{h} = \frac{h^2 - h}{h} = h - 1$$

Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h - 1 = -1$$

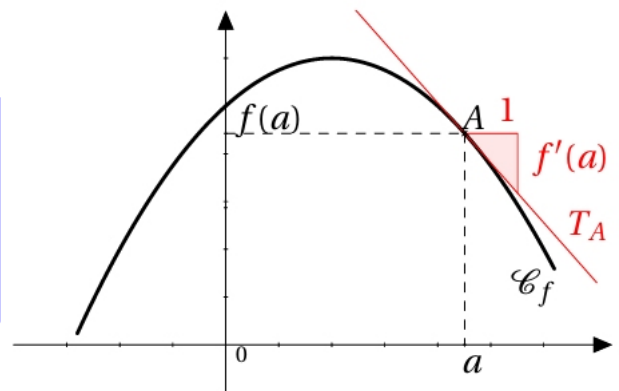
Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = -1$.

Équation de la tangente

Définition

Soit f une fonction dérivable en a , $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par le point A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.



Propriété

Soit f une fonction dérivable en a , $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

La tangente T_A en A à $\mathcal{C}_f$ a pour équation :

$$T_A : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Déterminons cette fois l'équation de la tangente en 2.

$$f'(a)(x - a) + f(a) = f'(2)(x - 2) + f(2) = -1 \times (x - 2) - 3 = -x + 2 - 3 = -x - 1$$

L'équation réduite de la tangente en 2 est $y = -x - 1$.

