Chapitre 6

Fonction dérivée 1

I Fonction dérivée d'une fonction donnée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

• Pour tout nombre réel $a \in I$ non nul et tel que $(a+h) \in I$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f en a, le nombre

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

• On dit que la fonction f est **dérivable** en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau(h)$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.

Ce nombre L, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a, et est noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

• Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Propriété

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

• On dit que f est dérivable sur I si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.

• On appelle **fonction dérivée** de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.
ainsi, $f' : x \longmapsto f'(x)$

II Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Dérivable sur...	$f'(x)$
(1) $f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
(2) $f(x) = mx$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
(3) $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
(4) $f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
(5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
(6) $f(x) = \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
(7) $f(x) = \lvert x\rvert$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x) = -1$ si $x < 0$ $f'(x) = 1$ si $x > 0$
(8) $f(x) = x^n, n > 0$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
(9) $f(x) = x^n, n < 0$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x) = nx^{n-1}$

Démonstrations

(1)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto p$, $p \in \mathbb{R}$

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{p-p}{h} = 0$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $0 \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable en x.

Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = 0$.

(2)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto mx$, $m \in \mathbb{R}$

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m(x+h)-mx}{h} = \frac{mx+mh-mx}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers m $\in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable en x.

Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = m$.

(3)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $2x \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable en x.

Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.

(4)

A savoir : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = 3x^2+3xh+h^2$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $3x^2 \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable en x.

Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$

(5)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Soit $x \neq 0$ et $h \neq 0$ tels que $x+h \neq 0$.

Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x}{x(x+h)} - \dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $\dfrac{-1}{x^2}$.

On a alors, pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

(6)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \in]0; +\infty[$

Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in]0; +\infty[$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable en x.

Or ceci est vrai pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Montrons que f n'est pas dérivable en 0.

Calculons pour cela le taux de variations de f entre 0 et $0+h$ avec $h \neq 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}\times\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}}=\frac{h}{h(\sqrt{h})}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$

En effet, lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

La fonction racine carrée est bien définie en 0 par contre elle n'est pas dérivable en 0.

III Fonction dérivée et opérations

Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables.

Fonction	Dérivée
(1) $f(x)=u(x)+v(x)$	$f'(x)=u'(x)+v'(x)$
(2) $f(x)=k\times u(x)$	$f'(x)=k\times u'(x)$
(3) $f(x)=u(x)\times v(x)$	$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$
(4) $f(x)=\frac{1}{u(x)}$	$f'(x)=-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
(5) $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v(x)^2}$
(6) $f(x)=g(ax+b)$	$f'(x)=ag'(ax+b)$

Démonstrations

(3)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Soit x un réel de I.

Calculons le taux de variations de la fonction uv entre x et $x+h$, avec $h\neq 0$ tel que $x+h\in I$:

$$\frac{uv(x+h)-uv(x)}{h}=\frac{u(x+h)\times v(x+h)-u(x)\times v(x)}{h}$$

$$\frac{uv(x+h)-uv(x)}{h}=\frac{u(x+h)\times v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)\times v(x)}{h}$$

$$\frac{uv(x+h)-uv(x)}{h}=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h)+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\times u(x)$$

Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x)\in\mathbb{R}$.

De même v est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$ tend vers $v'(x)\in\mathbb{R}$.

Enfin, on admet que si h tend vers 0, alors $v(x+h)$ tend vers $v(x)$.

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{uv(x+h)-uv(x)}{h}$ tend vers $u'(x)v(x)+v'(x)u(x)\in\mathbb{R}$.

Donc uv est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x de I, donc uv est dérivable sur I et $(uv)'=u'v+uv'$.

(4)

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Soit x un réel de I.

Calculons le taux de variations de la fonction $\dfrac{1}{u}$ entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:

$$\frac{\dfrac{1}{u(x+h)} - \dfrac{1}{u(x)}}{h} = \frac{\dfrac{u(x)-u(x+h)}{u(x)\times u(x+h)}}{h}$$

$$\frac{\dfrac{1}{u(x+h)} - \dfrac{1}{u(x)}}{h} = \frac{u(x)-u(x+h)}{hu(x)\times u(x+h)} = -\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \times \frac{1}{u(x)\times u(x+h)}$$

Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.

On admet de plus que si h tend vers 0, alors $u(x+h)$ tend vers $u(x)$.

Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{\dfrac{1}{u(x+h)} - \dfrac{1}{u(x)}}{h}$ tend vers $-u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)\times u(x)} = \dfrac{-u'(x)}{u(x)^2}$.

Donc $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)' = \dfrac{-u'(x)}{u(x)^2}$

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et telles que pour tout réel x de I, $v(x) \neq 0$.

$\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \frac{-v'}{v^2} = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$$