

Calculer les termes d'une suite

Exercice 1

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$.
 - (a) Calculer u_0 .
 - (b) Calculer u_{10} .
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
Donner la valeur des trois premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice 2 : Deux types d'augmentation pour 2 types de suites

1. Un loyer de 640 € subit une augmentation annuelle de 15 €.
On note L_n le loyer après n augmentations.
 - (a) Calculer L_1, L_2, L_3
 - (b) Quelle est la nature de la suite (L_n)
 - (c) Exprimer L_{n+1} en fonction de L_n puis L_n en fonction de n .
 - (d) Calculer L_{10}
2. Un capital $C_0 = 1000$ € est placé à intérêt composés de 2,5% par an.
On note C_n le capital n années après.
 - (a) Déterminer C_1
 - (b) Déterminer C_2
 - (c) Quelle est la nature de la suite (C_n)
 - (d) Déterminer C_{n+1} en fonction de C_n puis C_n en fonction de n

Exercice 3 : Calculer les termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme $u_1 = 7$

1. Calculer u_2
2. Calculer u_{27}
3. Calculer $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{27}$

Exercice 4 : Calculer les termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$

1. Calculer u_1
2. Calculer u_{10}
3. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$

Limite d'une suite

Evolution d'un capital

Au 1^{er} janvier 2025, Inès place 500 € sur un compte au taux annuel d'intérêts composés de 1,5 %.

Elle prévoit de ne faire aucun retrait sur ce compte et d'ajouter 100 € chaque 1^{er} janvier suivant.

On note S_n , la somme disponible sur le compte d'Inès au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , avec $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $S_0 = 500$.

1.

a) Vérifier que $S_1 = 607,50$.

Déterminer S_2 et S_3 . Arrondir au centième.

b) Expliquer pourquoi la suite (S_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2.

a) Pour tout entier naturel n , exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

b) Tabuler la suite (S_n) à l'aide de la calculatrice.

3. Déterminer la première année à partir de laquelle Inès disposera sur son compte au 1^{er} janvier

a) de plus de 1 000 €

b) de plus de 2 000 €

c) de plus de 5 000 €

d) de plus de 20 000 €

A noter : Il semble que S_n puisse dépasser n'importe quel nombre positif aussi grand soit-il.

On dit que la suite S_n a pour limite $+\infty$

et on le note $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

Conjecturer la limite d'une suite

1. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et $u_n = 0,2 \times u_n + 5$

A l'aide de la calculatrice, décrire le comportement de u_n pour de grandes valeurs de n et conjecturer la limite de (u_n)

2. (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{5}{4n^2 + 8}$

A l'aide de la calculatrice, décrire le comportement de v_n pour de grandes valeurs de n et conjecturer la limite de (v_n)

Déterminer la limite d'une suite

Exercice n°1

Etudier la limite des suites ci-dessous en justifiant :

- a) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = -4n + \frac{5}{\sqrt{n}}$
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6n^2 + 4n - 3$
- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n - 5e^n$
- d) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \left(\frac{1}{n} + 1\right) \times \left(\frac{2}{n} + 3\right)$
- e) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{-4}{n^3 + 2n}$
- f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+2)(-n+3)$

Exercice n°2

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{n}$.

- a) Déterminer la limite de la suite (u_n) , puis de (v_n)
- b) Pourquoi ne peut-on pas en déduire directement la limite de la suite $(u_n \times v_n)$?
- c) Simplifier $u_n \times v_n$ et déterminer la limite de la suite $(u_n \times v_n)$.

Exercice n°3

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -n^2 + 1 \quad \text{et} \quad v_n = 2n^2.$$

- a) Déterminer la limite de (u_n) , puis de (v_n) .
- b) Pourquoi ne peut-on pas en déduire directement la limite de la suite $(u_n + v_n)$?
- c) Réduire $u_n + v_n$ et déterminer la limite de $(u_n + v_n)$.

Exercice n°4

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 - 4n + 3.$$

- a) Vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}\right).$$

- b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice n°5

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n+3}{2n+7}$$

- a) Peut-on donner la limite de (u_n) en utilisant les règles opératoires ? Pourquoi ?
- b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{7}{n}}$.
- c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice n°6

Les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -6n^2 + 3n \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}$$

- a) Étudier la limite de la suite (u_n) .

Conseil : mettre n^2 en facteur, pour $n \geq 1$.

- b) Étudier la limite de la suite (v_n) .

Conseil : mettre n^2 en facteur au numérateur et au dénominateur, pour $n \geq 1$.

Evolution de température : Loi de Newton

Partie A

Info :

Isaac Newton a émis en 1701 une loi qui fournit un modèle pour prévoir l'évolution de la température :

« la variation de température d'un corps est proportionnelle à l'écart entre la température du corps et la température ambiante ».

On réchauffe un matériau, initialement placé dans un réfrigérateur à $T_0 = 5^\circ\text{C}$, dans une pièce à température ambiante $T = 20^\circ\text{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la température du matériau, en $^\circ\text{C}$, au bout de n minutes.

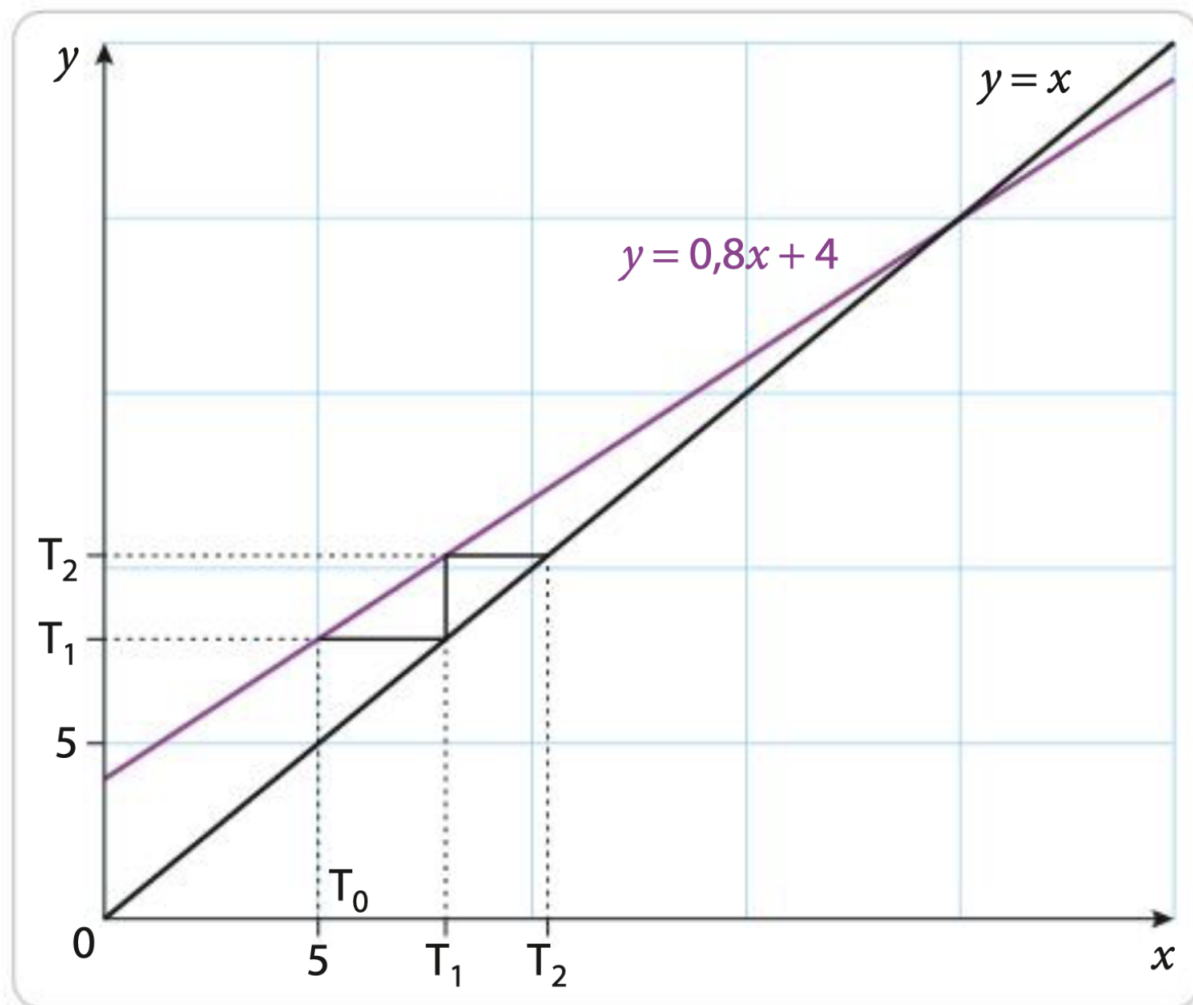
La loi de Newton permet d'écrire que :

Pour tout $n \geq 0$, $T_{n+1} - T_n = k(T_n - T)$ où k est un coefficient dépendant du matériau étudié.

On prendra pour le matériau $k = -0,2$.

1. Ecrire T_{n+1} en fonction de T_n
2. Calculer T_1 , T_2 et T_3
3. La suite est-elle arithmétique? Géométrique?
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer T_{10} , T_{15} et T_{25} . Interpréter pour la situation étudiée.
5. On a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,8x + 4$ et la droite d'équation $y = x$ sur le repère ci-dessous. Les nombres T_0 , T_1 et T_2 ont été construits.

Poursuivre la représentation de la suite (T_n) et conjecturer la limite de (T_n) .



partie B

1. Déterminer une suite constante égale à ℓ qui vérifie la même relation de récurrence que (T_n)
2. Calculer $T_0 - \ell$, $T_1 - \ell$ et $T_2 - \ell$ et démontrer que la suite $(T_n - \ell)$ est géométrique.
3. En déduire une expression de T_n en fonction de n puis la limite de (T_n) .
4. Interpréter physiquement les résultats fournis par le modèle.

Injection d'un médicament

On injecte en intra-veineuse une dose de 12 centimètres cubes (cc) d'un médicament à un patient. Le médicament étant assimilé peu à peu, la concentration de médicament dans le sang diminue de 40 % toutes les 10 minutes.

Pour maintenir une quantité à peu près constante du médicament, on injecte 3 cc de ce même médicament toutes les 10 min.

On note v_n le volume de médicament (en cc) au bout de $n \times 10$ minutes, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer v_0 , v_1 et v_2
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout n .
3. Déterminer une suite constante égale à ℓ qui vérifie la même relation de récurrence que (v_n) .
4. Montrer que $(v_n - \ell)$ est une suite géométrique et préciser sa raison.

En déduire une expression de v_n en fonction de n .

5. Déterminer la limite de la suite (v_n) . Interpréter le résultat.

Concentration d'un produit de réaction

La réaction en milieu acide entre des ions chlorure Cl^- et des molécules de peroxyde d'hydrogène H_2O_2 produit des molécules de diiode I_2 et de l'eau H_2O .

On note C_n la concentration, en $mmol \cdot L^{-1}$, de diiode à la n -ième minute ($n \geq 0$).

1. On a $C_0 = 0$ et des relevés expérimentaux permettent de modéliser la suite (C_n) par

$$C_n = 6(1 - 0,9^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer la limite de C_n quand n tend vers $+\infty$.

2. On considère que la réaction est terminée dès que 99 % de diiode est produit.

A l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps peut-on considérer que cette réaction sera terminée ?