

1 Suites arithmétiques et géométriques

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$.

1.1 Suites arithmétiques

(u_n) est une suite arithmétique de raison r

Relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

Terme général : $u_n = u_0 + nr = u_p + (n - p)r$

Somme : $S = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} + \text{dernier terme}}{2}$

1.2 Suites géométriques

(u_n) est une suite géométrique de raison q et $u_0 \neq 0$

Relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$

Terme général : $u_n = u_0 \times q^n = u_p \times q^{n-p}$

Somme : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2 Limite d'une suite

2.1 Limite infinie d'une suite

Définition

- Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi grands que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

On dit que (u_n) diverge et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi petits que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

On dit que (u_n) diverge et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Propriété

Les limites de référence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \text{ pour } p \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$$

2.2 Limite finie d'une suite

Définition

Une suite (u_n) a pour limite un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de ℓ que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

On dit que (u_n) converge vers ℓ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Propriété

Les limites de référence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \text{ pour } p \in \mathbb{N}^*$$

Règles opératoires pour les limites

On admet les règles opératoires présentées ci-dessous.

Somme

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \dots$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Quotient

Pour tout n , $v_n \neq 0$.

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \dots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas notés FI (forme indéterminée), on ne peut pas conclure immédiatement ; il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

Limite et suite géométrique

Propriété

Limite de (q^n)

Si $0 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Comparaison des limites

Propriété

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et N un entier naturel.

Si pour tout $n > N$, $u_n \leq v_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$ alors $L \leq L'$

Propriété

1. Soient deux suites (u_n) et (v_n) et N un entier naturel.

Si pour tout $n > N$, $u_n \leq v_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

2. Soient deux suites (u_n) et (v_n) et N un entier naturel.

Si pour tout $n > N$, $u_n \leq v_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Théorème des gendarmes

Propriété

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang N , $u_n \leq w_n \leq v_n$.

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite L , alors la suite (w_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$$

Suite arithmético-géométrique

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b avec $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$

Remarque

Si $a = 0$, la suite serait constante à partir du rang 1.

Si $a = 1$, la suite serait arithmétique de raison b .

Si $b = 0$ avec $a \neq 0$, la suite serait géométrique de raison a .

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$

Déterminons une suite constante égale à ℓ qui vérifie la même relation de récurrence que (u_n)

$$\ell = 0,8\ell + 1 \iff 0,2\ell = 1 \iff \ell = \frac{1}{0,2} \iff \ell = 5$$

$$\text{On a donc : } \begin{cases} u_{n+1} &= 0,8u_n + 1 \\ \ell &= 0,8\ell + 1 \end{cases}$$

Par différence membre à membre, on obtient :

$$u_{n+1} - \ell = 0,8u_n - 0,8\ell = 0,8(u_n - \ell)$$

La suite $(u_n - \ell)$ est donc une suite géométrique de raison 0,8.

Son premier terme est $u_0 - \ell = 1 - 5 = -4$

Par conséquent, $u_n - \ell = -4 \times 0,8^n$.

$$u_n = -4 \times 0,8^n + \ell$$

$$u_n = -4 \times 0,8^n + 5$$