

I Polynôme du second degré

Définition

Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour nombre réel x . On pourra abréger fonction polynôme du second degré en polynôme du second degré.

Exemples :

$5x^2 - 3x + 4$, $3x^2 + 12$ et $(5x - 2)(3x + 7)$ sont des polynômes du second degré.

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré. On appelle racine du polynôme f tout nombre réel a tel que $f(a) = 0$.

Exemples :

2 est une racine du polynôme $6x^2 - 42x + 60$ car $6 \times 2^2 - 42 \times 2 + 60 = 0$

5 est une racine du polynôme $6x^2 - 42x + 60$ car $6 \times 5^2 - 42 \times 5 + 60 = 0$

Aucun nombre réel n'est racine du polynôme $5x^2 + 12$.

En effet, $5x^2 + 12 = 0$ n'a pas de solution.

Propriété

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes x_1 et x_2 .

Alors f peut s'écrire sous forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Démonstration :

Considérons f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes x_1 et x_2 .

C'est à dire que $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$.

$f(x_1) = 0$ donc $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$. Par conséquent $c = -ax_1^2 - bx_1$

$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx - ax_1^2 - bx_1 = a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1)$ $x^2 - x_1^2 = (x - x_1)(x + x_1)$

$f(x) = a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1) = (x - x_1)\left(a(x + x_1) + b\right)$ (1)

x_2 est racine donc $f(x_2) = 0$

$f(x_2) = (x_2 - x_1)\left(a(x_2 + x_1) + b\right) = 0$

Puisque $x_1 \neq x_2$, $x_2 - x_1 \neq 0$

On a donc $a(x_2 + x_1) + b = 0$ et $b = -a(x_2 + x_1)$

Reprenons l'égalité (1) :

$f(x) = (x - x_1)\left(a(x + x_1) + b\right)$

$f(x) = (x - x_1)\left(a(x + x_1) - a(x_2 + x_1)\right)$

$f(x) = a(x - x_1)(x + x_1 - x_2 - x_1)$

On peut en déduire que $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemple :

On reprend le polynôme $f(x) = 6x^2 - 42x + 60$. Nous avons vu que 2 et 5 sont les 2 racines de f .

On a donc $f(x) = 6(x - 2)(x - 5)$

Propriété

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes.

La somme S des deux racines est $S = \frac{-b}{a}$

Le produit P des deux racines est $P = \frac{c}{a}$

Démonstration :

f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes x_1 et x_2 .

On a donc $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Développons cette expression :

$$f(x) = ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2$$

$$f(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

$$\text{Or } f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{On a donc } b = -a(x_1 + x_2) \text{ et } c = ax_1x_2 \quad x_1 + x_2 = S \text{ et } x_1x_2 = P$$

$$\text{On a donc } b = -aS \text{ et } c = aP$$

$$\text{On en déduit donc que } S = \frac{-b}{a} \text{ et } P = \frac{c}{a}$$

Application :

$$\text{Soit } f(x) = 3x^2 + 12x - 63$$

- (a) Déterminer la somme et le produit des deux racines de f .
- (b) Vérifier de deux façons que les racines de f sont 3 et -7
- (c) vérifier votre réponse de la première question

Correction :

$$(a) f(x) = 3x^2 + 12x - 63. a = 3, b = 12 \text{ et } c = -63$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-63}{3} = -21$$

$$(b) \text{ Méthode 1 : calculons } f(3) \text{ et } f(-7).$$

$$f(3) = 3 \times 3^2 + 12 \times 3 - 63 = 0$$

$$f(-7) = 3 \times (-7)^2 + 12 \times (-7) - 63 = 0$$

$$\text{Méthode 2 : Si 3 et } -7 \text{ sont les racines de } f \text{ alors on doit avoir } f(x) = 3(x - 3)(x + 7)$$

$$3(x - 3)(x + 7) = 3(x^2 + 7x - 3x - 21) = 3(x^2 + 4x - 21) = 3x^2 + 12x - 63 = f(x)$$

3 et -7 sont bien les racines de f .

$$(c) S = 3 - 7 = -4 \text{ et } P = 3 \times (-7) = -21$$

II Forme canonique

Propriété

Pour tout polynôme $ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$a(x - \alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique du polynôme $ax^2 + bx + c$

Démonstration : Soit f la fonction telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\text{D'où : } x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$\text{En notant } \Delta = b^2 - 4ac : f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Δ est appelé **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a}\right)$$

$$\text{Soit } f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{-\Delta}{4a}$$

Exemple :

$$\text{Soit } f(x) = 2x^2 + 8x - 10.$$

Écrire $f(x)$ sous forme canonique :

Déterminons α , le discriminant Δ et β .

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times 2} = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 144$$

$$\beta = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \times 2} = -18$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2(x + 2)^2 - 18$$

III Résoudre une équation du second degré

Propriété

Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Le nombre de solutions de cette équation dépend du signe de Δ .

— Si $\Delta > 0$: L'équation admet deux solutions distinctes,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$: L'équation admet une solution unique, $x_0 = \frac{-b}{2a}$

— si $\Delta < 0$: L'équation n'admet aucune solution.

Démonstration (à connaître) :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a \left[\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (\text{E})$$

- Si $\Delta > 0$: (E) équivaut à $x + \frac{b}{2a} = \frac{\Delta}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\Delta}{2a}$.

L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$: (E) équivaut à $x + \frac{b}{2a} = 0$, donc l'équation a une solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$: L'équation n'a pas de solution car $\left(x + \frac{b}{a} \right)^2$ est positif et $\frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement négatif.

Exercice corrigé :

(a) Résoudre $3x^2 + 12x - 36 = 0$ (E)

(b) Factoriser $3x^2 + 12x - 36$

Correction :

(a) $3x^2 + 12x - 36 = 0$ $a = 3, b = 12, c = -36$

Déterminons Δ .

$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 3 \times (-36) = 576$. $576 > 0$ donc l'équation (E) admet deux solutions distincts.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 - \sqrt{576}}{2 \times 3} = -6$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 + \sqrt{576}}{2 \times 3} = 2$$

L'équation (E) admet 2 solutions : -6 et 2 .

$$\mathcal{S} = \{-6; 2\}$$

(b) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x + 6)(x - 2)$

IV Représentation graphique

Propriété

Signe d'un polynôme du second degré

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ayant 2 racines distinctes x_1 et x_2 .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$f(x)$	signe de a	0	signe de -a	0	signe de a

Propriété

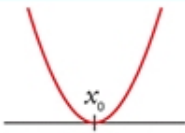
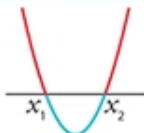
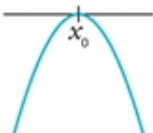
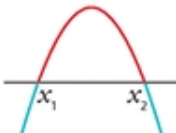
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

la représentation graphique de f est une parabole.

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha; \beta)$.

La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$

Les six exemple ci-dessous illustrent les différents cas de figure de position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses.

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$																									
$a > 0$	 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	+		 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	+	0	+	 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	0	+
x	$-\infty$	$+\infty$																										
$f(x)$	+																											
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																									
$f(x)$	+	0	+																									
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																								
$f(x)$	+	0	-	0	+																							
$a < 0$	 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">-</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	-		 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	-	0	-	 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	0	-
x	$-\infty$	$+\infty$																										
$f(x)$	-																											
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																									
$f(x)$	-	0	-																									
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																								
$f(x)$	-	0	+	0	-																							