

I Vocabulaire des événements

Définition

Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité**.

Exemples :

- Lancer un dé à six faces : "obtenir un 2" est une éventualité de cette expérience aléatoire,
- Tirage des six numéros gagnants du Loto : "obtenir la combinaison" $2 - 5 - 17 - 23 - 36 - 41$ est une éventualité de cette expérience aléatoire.

Définition

L'ensemble formé par les éventualités est appelé **univers**, il est très souvent noté Ω .

Exemples :

- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{ \text{pile} ; \text{face} \}$,
- lancer un dé à six faces : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

Définition

- Un **événement** de l'expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers,
- Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un **événement élémentaire**.

Exemples :

- $A = \text{"obtenir un 5"}$ est un événement élémentaire que l'on peut noter $A = \{ 5 \}$,
- $B = \text{"obtenir un numéro pair"}$ est un événement que l'on peut noter $B = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$.

Définition

- L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'**événement impossible**, noté $\emptyset$,
- l'événement composé de toutes les éventualités est appelé **événement certain**.

Exemples :

- Tirage des six numéros gagnants du loto : "obtenir la combinaison $3 - 25 - 38 - 59 - 67 - 91$ " est un événement impossible (les numéros vont de 1 à 49),
- Lancer d'un dé à six faces : "obtenir un nombre positif" est un événement certain.

Définition

Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé **événement contraire** (ou complémentaire) de A , qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A .

Exemples :

- Lancer d'une pièce de monnaie : si $A = \{ \text{pile} \}$ alors son événement contraire est $\overline{A} = \{ \text{face} \}$,
- Lancer d'un dé à six faces : si A est l'événement "obtenir un nombre inférieur ou égal à 4", alors son événement contraire $\overline{A}$ est l'événement "obtenir 5 ou 6".

II Rappel de seconde

Propriété

Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice corrigé :

Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres au départ de Nantes. Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.

De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option «visites guidées».

Une étude a produit les données suivantes :

	A : Avion	$\overline{A}$: Train	Total
V : Visite guidée	272	336	608
$\overline{V}$: Pas de visite	48	144	192
Total	320	480	800

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.

On considère les événements suivants :

— A : «le client a choisi l'avion» ;

— V : «le client a choisi l'option «visites guidées»».

Calculer :

$P(A)$; $P(\overline{A})$; $P(V)$; $P(A \cap V)$; $P(A \cup V)$

Correction :

- $P(A) = \frac{320}{800} = 0,4$

Il y a 40% de chance qu'un client choisi au hasard ait pris l'avion.

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

Il y a 60% de chance qu'un client choisi au hasard ait pris le train.

- $P(V) = \frac{608}{800} = 0,76$

Il y a 76% de chance qu'un client choisi au hasard ait pris la visite guidée.

- $P(A \cap V) = \frac{272}{800} = 0,34$

Il y a 34% de chance qu'un client choisi au hasard ait pris l'avion et la visite guidée.

- $P(A \cup V) = P(A) + P(V) - P(A \cap V) = 0,4 + 0,76 - 0,34 = 0,82$

Il y a 82% de chance qu'un client choisi au hasard ait pris l'avion **OU** la visite guidée.

III Probabilité conditionnelle

Nous allons dans cette partie calculer la probabilité d'un événement à condition qu'un autre soit vérifié.

Définition

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note $P_A(B)$. Si $p(A) \neq 0$, la probabilité de l'événement B sachant A , est égale à :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque :

Si $p(B) \neq 0$, on définit de même

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent :

	A : Avion	$\bar{A}$: Train	Total
V : Visite guidée	272	336	608
$\bar{V}$: Pas de visite	48	144	192
Total	320	480	800

Déterminer $P_V(A)$ puis $P_A(V)$

Correction :

$$P_V(A) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)}$$

$$P_V(A) = \frac{0,34}{0,76} \approx 0,45$$

Sachant que le client a choisi la visite guidée, il y a 45% de chance que celui-ci a pris l'avion.

$$P_A(V) = \frac{P(A \cap V)}{P(A)}$$

$$P_A(V) = \frac{0,34}{0,4} = 0,85$$

Sachant que le client a choisi l'avion, il y a 85% de chance que celui-ci ait pris la visite guidée.

Propriété

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Propriété

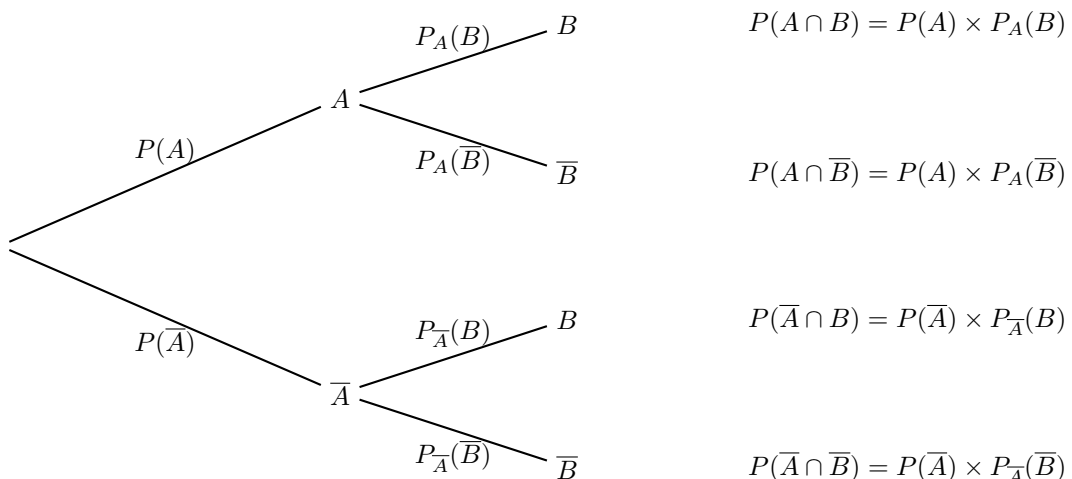
Pour tous les événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(A) = 1$
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- Si A et B sont des événements incompatibles (c'est à dire ne pouvant se réaliser simultanément ou encore tels que $A \cap B = \emptyset$) alors $P_A(B) = 0$

IV Arbres pondérés

On peut modéliser une expérience aléatoire, mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers Ω par un **arbre pondéré**.

Ainsi, en considérant deux événements A et B, l'arbre ci-dessous modélise la situation :



Une branche relie deux événements. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante.

Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin

V Formule des probabilités totales

Définition

Une partition de l'univers Ω est un ensemble d'événements deux à deux incompatibles, et dont la réunion est Ω .

Propriété

On considère $A_1, A_2, \dots, A_n$ n événements de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω .

Pour tout événement B , on a $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$

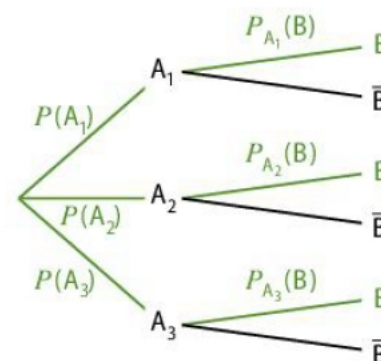
c'est-à-dire : $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$

Remarque :

Sur un arbre pondéré, la probabilité de l'événement B s'obtient en additionnant les probabilités des chemins conduisant à la réalisation de B .

Exemple : Dans le cas de trois événements A_1, A_2, A_3 :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$



Cas particulier :

A et B étant deux événements, avec A et $\bar{A}$ de probabilité non nulle, on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

VI Indépendance de deux événements

Dans l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B de probabilité non nulle.

Si $P_A(B) = P(B)$, c'est-à-dire si la réalisation ou non de l'événement A ne modifie pas la probabilité de B , on dit que l'événement B est indépendant de l'événement A .

Propriété

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $P_A(B) = P(B)$;

(2) $P_B(A) = P(A)$;

(3) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exemple :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements suivants :

A : « la carte tirée est un carreau », B : « la carte tirée est un roi » et C : « la carte tirée est rouge ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Solution

Le jeu contient huit carreaux, quatre rois et seize cartes rouges.

La carte étant tirée au hasard, on a :

1.

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$P(C) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$A \cap B$ est l'événement : « la carte tirée est un roi de carreau ». Comme il n'y a qu'un " roi de carreau dans le jeu, on a

$$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$$

$$\text{De plus, } P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

Ainsi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Les événements A et B sont indépendants.

Autre méthode :

$$P_B(A) = \frac{1}{4}. P_B(A) = P(A) \text{ donc les événements A et B sont indépendants.}$$

2.

$A \cap C$ est l'événement : « la carte tirée est un carreau et une carte rouge ». Tous les carreaux étant des cartes rouges :

$$P(A \cap C) = P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\text{D'autre part, } P(A) \times P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Ainsi $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$. Les événements A et C ne sont pas indépendants.

VII Succession de deux épreuves indépendantes

Définition

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soient indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une succession de deux épreuves indépendantes.

Remarque :

- Deux épreuves sont indépendantes si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultats de l'autre.
- L'indépendance fait partie de la modélisation. Par exemple, quand on réalise une succession de deux tirages avec remise, on considère qu'il y a indépendance car après le 1^{er} tirage et la remise, on revient à la situation de départ.

Propriété

On peut représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un arbre dont les pondérations sont les probabilités (non conditionnelles) des différents résultats pour chacune des épreuves.

Exemple :

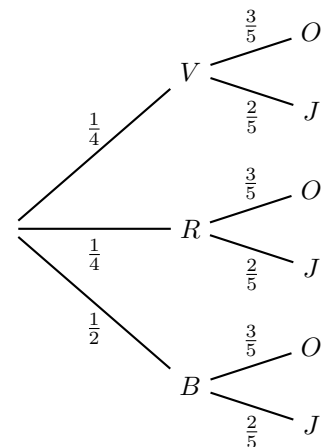
On place 1 boule verte, 1 boule rouge et 2 boules bleues dans l'urne 1 puis 3 boules oranges et 2 boules jaunes dans l'urne 2. On tire une boule dans l'urne 1 puis une boule dans l'urne 2.

On admet que ces deux épreuves sont indépendantes, donc que les événements V : « La 1^{er} boule est verte », R : « La 1^{er} boule est rouge » et B : « La 1^{er} boule est bleue » sont indépendants des événements O : « La 2^e boule est orange » et J : « La 2^e boule est jaune ».

Ainsi, on a :

- $P_V(O) = P_R(O) = P_B(O) = P(O) = 0,6$
- $P_V(J) = P_R(J) = P_B(J) = P(J) = 0,4$.

On peut donc représenter la situation par l'arbre ci-contre.

**Propriété**

On peut représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un tableau à double entrée dont la 1^{er} ligne contient les résultats de la 1^{er} épreuve et la 1^{er} colonne ceux de la 2^e épreuve (ou inversement) et les cases intérieures les probabilités associées obtenues par produit.

Dans l'exemple précédent, on peut aussi représenter la situation par le tableau suivant :

	V	R	B
O	$0,25 \times 0,6 = 0,15$	$0,25 \times 0,6 = 0,15$	$0,5 \times 0,6 = 0,3$
J	$0,25 \times 0,4 = 0,1$	$0,25 \times 0,4 = 0,1$	$0,5 \times 0,4 = 0,2$